Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 18 giugno 2025

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

determinandone insieme di definizione, continutà, derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali e assoluti, monotonia, estremi superiore e inferiore, convessità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Essendo f il prodotto di un polinomio e di un esponenziale, definiti ovunque su $\mathbb{R}$, il suo dominio è uguale a $\mathbb{R}$. Notiamo anche che f è derivabile, e quindi continua, su tutto il suo dominio in quanto prodotto di funzioni derivabili.

Studiamo i limiti agli estremi del dominio. Abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

in quando entrambi i fattori tendono a $+\infty$. Inoltre, in modo simile abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

e quindi f non ha asintoti per $x \to -\infty$.

Abbiamo poi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

per gerarchia degli infiniti (visto che $e^{-x} \to 0$). In particolare, f ha un asintoto orizzontale $\{y = 0\}$ per $x \to \infty$.

Calcoliamo la derivata prima. Abbiamo

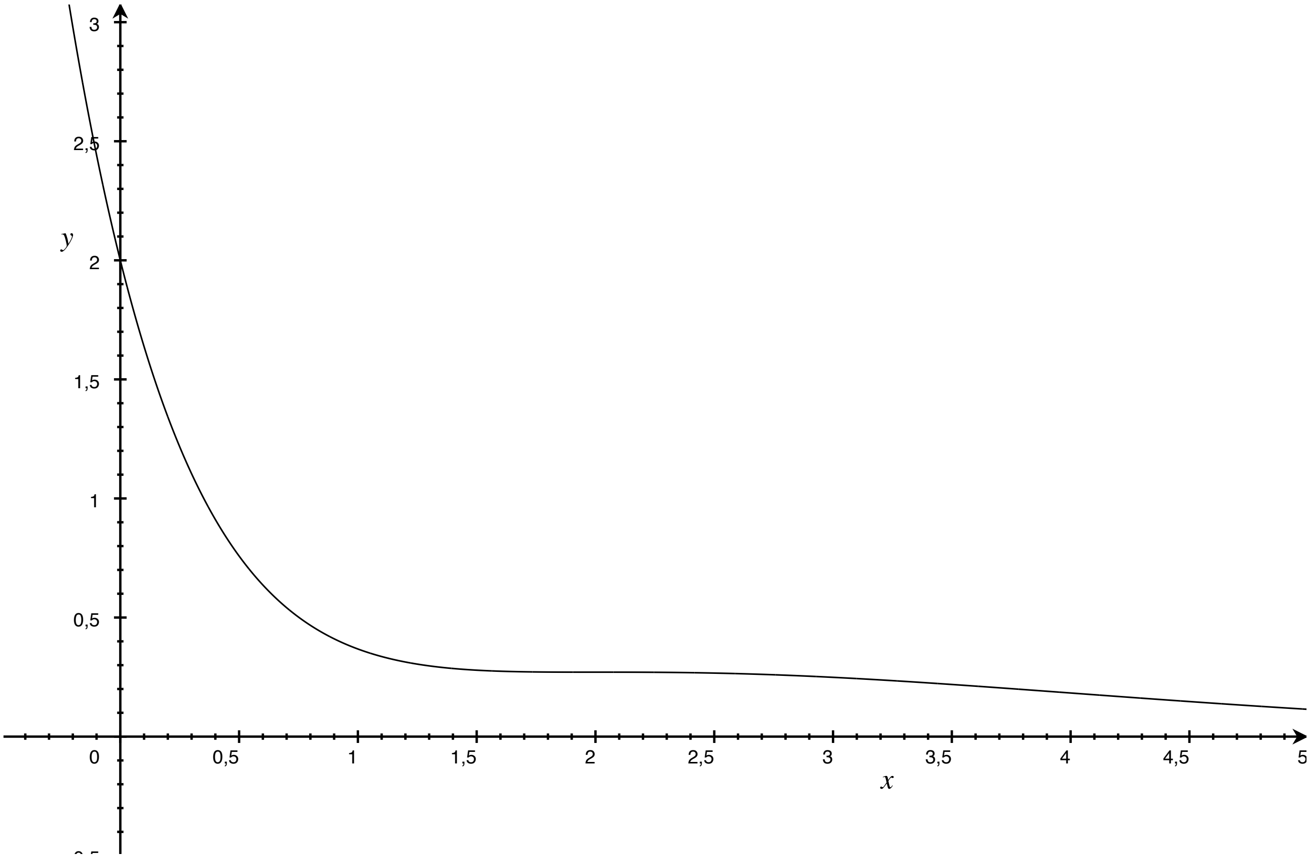
$$f'(x) = (2x - 2)e^{-x} - (x^2 - 2x + 2)e^{-x} = -(x^2 - 4x + 4)e^{-x} = -(x - 2)^2 e^{-x}.$$

Abbiamo quindi $f'(2) = 0$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x \neq 2$. La funzione è quindi mononota (strettamente) decrescente su tutto il dominio. Non ha né massimi né minimi locali (e quindi globali). Non è limitata superiormente e ha estremo inferiore uguale a 0. In particolare, notiamo che f è sempre strettamente positiva (questo si può anche vedere direttamente osservando che il polinomio $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ nella definitione di f non ha radici reali).

Calcoliamo la derivata seconda. Abbiamo

$$f''(x) = -2(x - 2)e^{-x} + (x - 2)^2 e^{-x} = (x - 2)(x - 4)e^{-x}.$$

Visto che e^{-x} è sempre positivo, il segno è dato da $(x - 2)(x - 4)$. Abbiamo quindi $f''(x) > 0$ per $x < 2$ e $x > 4$, dove f è convessa, $f''(x) < 0$ per $2 < x < 4$, dove f è concava, e $f''(2) = f''(4) = 0$. Abbiamo quindi due punti di flesso in $x = 2$ e $x = 4$.



Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\log(1+3^n)}{n^2\log(3n)}\right)^{n\sin\left(\frac{3}{n}\right)}$$

Soluzione

Esercizio 3 Dire, al variare di $\alpha > 0$, se l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x-x^\alpha)}{x^2\arctan(x+x^\alpha)}$$

converge, diverge positivamente, diverge negativamente o è indeterminato.

Soluzione

L'unico punto problematico nell'intervallo di integrazione è l'estremo superiore. Visto che la funzione $x+x^\alpha$ è strettamente crescente, lo è anche $\arctan(x+x^\alpha)$, da cui $\arctan(x+x^\alpha)\geq\arctan(1)=\pi/4$, quindi $\frac{1}{\arctan(x+x^\alpha)}\leq\frac{4}{\pi}$, per ogni $x\geq 1$. Usando $|\sin(t)|\leq 1$, segue che

$$\left|\frac{\sin(x-x^\alpha)}{x^2\arctan(x+x^\alpha)}\right|\leq\frac{4}{x^2\pi}$$

da cui segue, per i criteri del confronto e della convergenza assoluta, che l'integrale converge per ogni $\alpha > 0$.